

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa locală, 14.02.2026**  
**Clasa a VII-a**  
**Barem de evaluare**

**SUBIECTUL I**

a) Calculați valoarea expresiei

$$E = a^{b^c} + b^{c^a} + c^{a^b},$$

știind că

$$a = \sqrt{1\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{1\frac{1}{4}} \cdots \sqrt{1\frac{1}{99}} \cdot \sqrt{2}, \quad b = \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} - \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2} + |-\sqrt{5}|,$$

$$c = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{4}}{\sqrt{8}}.$$

Soluție și barem

**2,5p oficiu**

$$a = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{\frac{5}{4}} \cdots \sqrt{\frac{100}{99}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{\frac{100}{2}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{50} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{100} = 10. \dots\dots\dots 3p$$

$$b = |\sqrt{3} - 2| - |\sqrt{3} - \sqrt{5}| + \sqrt{5} = (2 - \sqrt{3}) - (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + \sqrt{5} = 2. \dots\dots\dots 3p$$

$$c = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0. \dots\dots\dots 3p$$

$$b^c = 2^0 = 1 \Rightarrow a^{b^c} = a = 10, c^a = 0^{10} = 0 \Rightarrow b^{c^a} = 2^0 = 1, a^b = 10^2 = 100 \Rightarrow c^{a^b} = 0^{100} = 0.$$

$$E = 10 + 1 + 0 = 11. \dots\dots\dots 2,5p$$

b) Demonstrați că suma elementelor mulțimii A este un multiplu al lui 5.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{|3\sqrt{5} - 7| + \sqrt{(3+2\sqrt{5})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{5})^2}}{2x-5} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Soluție și barem

$$|3\sqrt{5} - 7| = 7 - 3\sqrt{5}, \sqrt{(3+2\sqrt{5})^2} = |3 + 2\sqrt{5}| = 3 + 2\sqrt{5}, \sqrt{(1-\sqrt{5})^2} = \sqrt{5} - 1 \dots\dots\dots 6p$$

$$7 - 3\sqrt{5} + (3 + 2\sqrt{5}) + \sqrt{5} - 1 = 9 \dots\dots\dots 2p$$

$$\frac{9}{2x-5} \in \mathbb{Z}, \quad 2x-5 \in D_9 = \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}.$$

$$2x-5 = 1, 2x = 6 \Rightarrow x = 3.$$

$$2x-5 = -1, 2x = 4 \Rightarrow x = 2.$$

$$2x-5 = 3, 2x = 8 \Rightarrow x = 4.$$

$$2x-5 = -3, 2x = 2 \Rightarrow x = 1.$$

$$2x-5 = 9, 2x = 14 \Rightarrow x = 7.$$

$$2x - 5 = -9, 2x = -4 \Rightarrow x = -2.$$

$$x \in \{-2, 1, 2, 3, 4, 7\}. \dots\dots\dots 2p$$

$$S = -2 + 1 + 2 + 3 + 4 + 7 = 15 : 5 \dots\dots\dots 1p$$

**SUBIECTUL II**

Determinați numerele  $a, b, c$  știind că  $\sqrt{abc} = \frac{3}{2} \cdot (a + b + c)$ .

Soluție și barem

**2,5p oficiu**

$$\text{cum } 10^2 = 100, \text{ iar } 31^2 = 961, \sqrt{abc} \in \{10, 11, \dots, 31\} \dots\dots\dots 5,5p$$

$$2\sqrt{abc} = 3(a + b + c), \text{ iar } 2 \text{ și } 3 \text{ sunt prime între ele,}$$

$$\text{deducem } \sqrt{abc} \text{ este multiplu de } 3 \dots\dots\dots 5,5p$$

$$\text{deci } \overline{abc} \in \{12^2, 15^2, 18^2, 21^2, 24^2, 27^2, 30^2\} \dots\dots\dots 6,5p$$

$$\text{Verificăm fiecare situație și găsim } \overline{abc} = 729, \text{ deci } a=7, b=2, c=9 \dots\dots\dots 5p$$

**SUBIECTUL III** În patrulaterul convex  $ABCD$ ,  $\sphericalangle ABC = 45^\circ$ ,  $\sphericalangle BAD = 150^\circ$ , iar triunghiul  $ADC$  este dreptunghic isoscel cu ipotenuza  $AC$ . Calculați măsura unghiului  $\sphericalangle BDC$ .

(GM 10-2025)

Soluție și barem

**2,5p oficiu**

În triunghiul  $ADC$  dreptunghic isoscel construim  $DE \perp AC \Rightarrow$

$$DE \text{ este și mediană, } DE = \frac{AC}{2} = a \dots\dots\dots 3,5p$$

$$\text{În patrulaterul } ABCD, \sphericalangle BCD = 75^\circ \dots\dots\dots 3,5p$$

$$\text{În triunghiul } ABC \text{ construim } AF \perp BC, \sphericalangle ACF = 30^\circ, \text{ aplicăm teorema unghiului de } 30^\circ \text{ și găsim}$$

$$AF = \frac{AC}{2} = a \dots\dots\dots 4,5p$$

$$\text{Triunghiul } ABF = \text{dreptunghic isoscel, de unde } AF = BF = a \dots\dots\dots 3p$$

$$\triangle AFB \equiv \triangle DEA \text{ (C.C.) de unde } AB \equiv AD \dots\dots\dots 4p$$

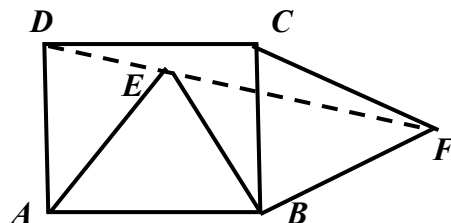
$$\text{Triunghiul } ABD = \text{isoscel} \dots\dots\dots 2p$$

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle ADB = 15^\circ, \text{ de aici } \sphericalangle BDC = 75^\circ \dots\dots\dots 2p$$

**SUBIECTUL IV** Pe laturile consecutive  $AB$  și  $BC$  ale unui pătrat  $ABCD$  se construiesc două triunghiuri echilaterale  $ABE$  și  $BCF$  (primul cu vârful în interior și al doilea cu vârful în exteriorul pătratului). Să se arate că punctele  $D, E, F$  sunt coliniare.

Soluție și barem

2,5p oficiu



$\triangle FCD$  isoscel ( $FC=CD$ ) .....3,5p

$\angle FCD = 150^\circ \Rightarrow \angle CDF = \angle CFD = 15^\circ \Rightarrow$  .....3,5p

$\angle EDA = \angle DEA = 75^\circ$  .....3,5p

$\triangle BEA$  echilateral  $\Rightarrow \angle BEA = 60^\circ$  . .....3p

$\angle FBE = 90^\circ, FB=BE \Rightarrow \triangle FBE$  dreptunghic isoscel  $\Rightarrow \angle FEB = 45^\circ$  .....3p

$\angle FED = \angle FEB + \angle BEA + \angle AED \Rightarrow \angle FED = 180^\circ \Rightarrow$  .....3p

Punctele  $F, E, D$  sunt coliniare. ....3p

**Notă:** Orice altă rezolvare corectă a unei probleme, se evaluează cu maxim de puncte (22,5p)

Probleme propuse de prof. Cojocnean Mihaela, prof. Stoica Angela